POLINOMI DI TAYLOR

PROBLEMA

- Data f(x) regolare, $x_0 \in dom(f)$, $n \in \mathbb{N}$, vogliamo trovare il polinomio $P_n(x)$ di grado n che approssima meglio f(x) vicino x_0
- Es: n=0, $P_n(x)=f(x_0)$, n=1, $P_n(x)=f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$, cioè $f(x)=P_n(x)+o(|x-x_0|^n)$
- Non è detto che esista
- Se esiste è unico
- Anche se f è derivabile ∞ volte in x_0 non è detto che $\lim_{n\to\infty} T_n(x)=f(x)$

DEFINIZIONE

- Data $f: I \to \mathbb{R}$, I aperto, f differenziabile n volte in $x_0 \in I$, si dice polinomio di Taylor di grado n di f in x_0 il polinomio:

$$T_n(f, x_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

CALCOLO

- $T_n(af+bg, x_0) = a\,T_n(f, x_0) + b\,T_n(g, x_0) \quad a, b \in \mathbb{R}$
- $T_{n-1}(f', x_0) = T_n(f, x_0)'$
- f pari ⇒ il polinomio ha solo esponenti pari
- f dispari ⇒ il polinomio ha solo esponenti dispari

RESTI

RESTO DI PEANO

- f differenziabile n volte in x_0, $n \in \mathbb{N}$, $f(x)=T_n(f,x_0)(x)+o(|x-x_0|^n)$
- $o(|x-x_0|^n)$ si chiama resto di Peano
- Serve per calcolare $\lim x \to x_0$

RESTO DI LAGRANGE

- f derivabile n+1 volte in un intorno di x_0 ⇒

$$f(x) = T_n(f, x_0)(x) + f^{(n+1)}(t)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

- con $t \in (x_0, x)$ o $t \in (x, x_0)$
- $$\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$ si chiama resto di Lagrange
- per n=0 è il teorema di Lagrange
- È utile per ottenere info di tipo "globale"

RESTO INTEGRALE

- Se f è integrabile n volte e f^n è integrabile ⇒

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt$$

- $$\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt$$ si chiama resto integrale
- Se f^n è continua posso dimostrare la formula di Taylor con resto di Lagrange a partire da quella con resto integrale
- La formula con resto integrale produce stime più precise di quelle che si ottengono col resto di Lagrange

SERIE DI TAYLOR

- f derivabile infinite volte in x_0, chiamiamo serie di Taylor di f in x_0, la serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

ESEMPI

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1}) \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + o(x^{10}) \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\tanh x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + o(x^{10}) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n) \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + o(x^n) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\operatorname{arctanh} x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \\
&\quad + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)
\end{aligned}
$$

$$\text{con } \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\cdots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}$$